GEOMETRIE ALGEBRIQUE PLANE EN CARACTERISTIQUE FINIE

S.DIALLO

THESE DE 3ème CYCLE

PRESIDENT : M. APERY

EXAMINATEURS: R. CAMPBELL

D. PHAM

Caen 1965

AVANT-PROPOS

-:-:-:-:-:-

Je remercie Monsieur le Professeur APÉRY qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail et qui l'a dirigé avec une attention et une bonté toujours disponinles.

Je remercie également MM. les Professeurs R. CAMPBELL et L. GAUTHIER qui ont bien voulu se joindre à lui pour examiner ce travail

Je remercie également Monsieur le Professeur PHAM qui a bien voulu remplacer Monsieur le Professeur GAUTHIER empêché

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Chapitre I

PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES

Introduction

Nous nous proposons de faire de la géométrie sur un corps de caractéristique finie p. Pour des raisons de commodité, le corps K est plongé dans un corps Ω algébriquement clos. La caractéristique sera toujours supposée impaire et nous porterons une attention particulière au cas où p = 3

Dans un corps de caractéristique finie on a

$$\forall x \quad \forall y \qquad (x+y)^p = x^p + y^p$$

plus généralement, quelque soit h entier positif

$$\forall x \quad \forall y \qquad (x+y)^{p^h} = x^{p^h} + y^{p^h}$$

D'autre part les entiers n, ou plus exactement les produits par n de l'élément unité vérifient le théorème de Fermat.

$$n^p = n$$

Ce théorème n'est pas vrai pour les autres éléments de K.

Un trait particulier de la caractéristique p est l'existence de polynômes non constants à dérivée nulle. Pour que f(x) ait une dérivée nulle il faut et il suffit que

$$f(x) = g(x^p) = \left[g_1(x)\right]^p$$

$g_1(x)$ est à coefficients dans K si K est parfait (par exemple si K est fini). Dans le cas général, $g_1(x)$ a ses coefficients dans Ω .

Formule de Taylor à une variable

Soit f un polynôme à une variable d'ordre n. Si nous supposons x fixe, f(x+h) devient un polynôme en h d'ordre n qui, ordonné selon les puissances croissantes, s'écrit:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} h^k f_k(x)$$

En caractéristique zéro

$$f_k(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)$$

En caractéristique p cette formule ne reste valable que pour $k < p$.

Posons $\Delta_k(f) = f_k$.

Quelque soit l'entier n nous désignerons respectivement par n_o et $\bar{n}$ son quotient et son reste de division par p

$$n = n_o p + \bar{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq \bar{n} < p$$

Si $k < p$ la dérivée $k^{ième}$ de x^n est

$$\bar{n}(\bar{n}-1)\ldots(\bar{n}-k+1)\, x^{n-k}$$

k étant donné, pour que la dérivée $k^{ième}$ d'un polynôme soit nulle il faut et suffit que tous les termes aient un degré n tel que $0 \leq \bar{n} \leq k$, si $k \geq p$ la dérivée $k^{ième}$ de x^n est nulle quel que soit n .

Pour calculer $\Delta_p(x)$ on écrit

$$(x+h)^{n_o p+\bar{n}} = (x+h)^{\bar{n}} \left[(x+h)^{n_o}\right]^p$$

En écrivant uniquement les termes de degré $\leq p$ en h

$$(x+h)^{n_o p+\bar{n}} = (x+h)^{\bar{n}} \left[n_o h^p x^{(n_o-1)p}\right] \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$\Delta_p(x^n) = n_o\, x^{n-p}$$

Pour que $\Delta_p(x^n)$ soit nul il faut et suffit que n_o soit multiple de p .

Formule de Taylor à plusieurs variables

Nous nous limitons au cas où f est un polynôme homogène de degré n par rapport à r variables $(x_1,\ldots,x_r)$. On pose pour simplifier $x = (x_1, x_2, \ldots x_r)$

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_r+h_R) = f(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi_k(x_1, x_r, h_1, \ldots h_r)$$

φ_k est un polynôme homogène de degré $(n-k)$ par rapport à $(x_1,\ldots,x_2)$ et un polynôme homogène de degré k par rapport à $(h_1,\ldots,h_r)$

$$\varphi_1 = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\ldots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right) f$$

(Quelle que soit la caractéristique du corps)

En caractéristique zéro

$$\varphi_k = \frac{1}{k!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots\ldots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) f$$

En caractéristique p la formule n'est valable que pour $k < p$

Pour $k = p$ la formule reste valable à condition de remplacer

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^p \quad \text{par} \quad \Delta_p$$

et de simplifier les coefficients des autres termes

Par exemple si $p = 3$

$$\varphi_3 = \sum h_1^3 \quad \Delta_{1,x_i} + \frac{1}{2}\sum h_i^2 \quad h_j \quad \frac{\partial^3}{\partial^2 x_i \, \partial x_j} + \sum h_i h_j k_p \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

Nous écrivons $\frac{1}{2}$ au lieu de -1 pour garder autant que possible la formule de la caractéristique 0.

Selon la convention usuelle la deuxième somme est étendue aux $r(r-1)$ arrangements (i,j) tandis que la troisième est étendue à $\frac{r(r-1)(r-2)}{6}$ combinaisons (i,j,k) . Pour que φ_3 soit nul il faut et suffit que Δ_{3,x_i} soit nul et que toutes les dérivées partielles troisièmes soient nulles.

Applications

kème polaire d'un point par rapport à une courbe

Soient (x,y,z), (X,Y,Z) deux points du plan projectif; posons pour simplifier

$$(x,y,z) = (x) \quad \text{et} \quad (X,Y,Z) = (X)$$

Désignons par

$\lambda(x) + \mu(X)$ la droite D qui passe par ces deux points λ, μ sont des éléments du corps Ω .

Soit F une courbe irréductible d'ordre n d'équation

$$f(x,y,z) = 0$$

On appelle intersection de D et de F les points $\lambda(x) + \mu(X)$ où (λ, μ) est solution de l'équation

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542709_0007

$$f(\lambda x + \mu X, \lambda y + \mu Y, \lambda z + \mu Z) = \lambda^n f(x,y,z) + \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda^{n-k} \mu^k \varphi_k((x),(X))$$

Les φ_k sont les polynômes du paragraphe précédent, on a remplacer $(x_1, \ldots x_r)$ par (x,y,z) et $(h_1 \ldots\ldots, h_r)$ par (X,Y,Z)

Supposons maintenant que (x,y,z) soit un point de F c'est à dire que nous avons

$$f(x,y,z) = 0$$

si cette hypothèse entraîne que

$$\varphi_k \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq r-1$$

et $\varphi_r((x),(X)) \not\equiv 0$ pour au moins un point (X) du plan on dit que (x,y,z) est multiple d'ordre r .

S'il existe au moins un point (X) du plan tel que

$$\varphi_1((x),(X)) \not\equiv 0$$

On dit que le point (x) est simple sur la courbe. Cela se traduit par le fait que les coefficients de φ_1 considéré comme fonction linéaire en X,Y,Z ne sont pas tous nuls. Autrement dit, une au moins des dérivées f'_x , f'_y , f'_z est différente de 0.

Nous conviendrons d'appeler $(n-k)^{\text{ème}}$ polaire du point (x,y,z) par rapport à F le polynôme φ_k qui est de degré $(n-k)$ par ra port à (x,y,z) et de degré k par rapport à (X,Y,Z)

Points d'inflexion d'une courbe

Définition

Un point d'une courbe F est appelé un point d'inflexion si:

1°) il est simple

2°) si la tangente à F en ce point coupe F en au moins 3 points confondus en ce point.

Soit $f = 0$ l'équation de F et soit P un point simple de F. Une droite du plan déterminée par $P(x,y,z)$ et un autre point (X,Y,Z) coupe F en les points $\lambda(x) + \mu(X)$ où (λ,μ) est solution de

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda^{n-k} \mu^k \varphi_k((x),(X)) = 0$$

P étant simple f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas tous nuls et la droite d'équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

est la tangente à F en P. Les points P est un point d'inflexion si cette tangente coupe F en 3 points confondus en P, c'est à dire si $\mu = 0$ est racine triple de l'équation ci-dessus. Ce qui implique que le coefficient de μ^2 dans cette même équation doit être nul

$$\varphi_2((x),(X)) = 0$$

La $(n-2)^{ième}$ polaire s'annule donc au point (X,Y,Z) qui est générique pour la tangente. Il en résulte que φ_1 est une composante de φ_2. Réciproquement si φ_1 est une composante de φ_2 la tangente d'équation $\varphi_1 = 0$ satisfait les conditions ci-dessus et le point (x,y,z) est un point d'inflexion

D'où :

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'une courbe irréductible soit un point d'inflexion est que:

1°) il soit simple

2°) la $(n-1)^{ème}$ polaire soit une composante de la $(n-2)^{ème}$ polaire du point

Remarque:

En géométrie sur un corps de caractéristique 0, la $(n-2)^{ème}$ polaire d'un point de la courbe qui est une conique ne se décompose que si le point considéré est soit un point double, soit un point d'inflexion. Nous verrons qu'il n'en est pas de même si la caractéristique du corps est finie.

Chapitre II

POINTS SINGULIERS ET QUASI-SINGULIERS

Dans ce chapitre , nous examinerons quelques particularités des points singuliers dues au fait que la caractéristique est finie. Nous utiliserons pour cela la notion de place plus appropriée à l'étude de telles questions. Nous supposerons dans cette étude que le corps est algébriquement clos, car dans ce cas on sait que tout point de la courbe est centre d'au moins une place (et d'au plus un nombre fini de places)

Si le point O appartient à une seule place de la courbe C, il absorbe ω points de l'intersection de C avec une droite générale passant par O .ω' points avec la tangente en O à C. Le point est dit d'ordre ω et de type (ω,ω'). Les entiers ω,ω' vérifient $1 \leq \omega < \omega'$. Le point est dit ordinaire si $\omega = 1$, $\omega' = 2$; singulier si $\omega > 1$; quasi-singulier si $\omega' > 2$.

Plus généralement, on peut définir l'ordre et le type d'une place arbitraire, même si cette place a même centre que d'autres places. L'ordre de multiplicité d'un point est la somme des ordres des places ayant pour centre ce point.

Selon un langage emprunté à la géométrie sur le corps des réels nous appellerons inflexion tout point de type (1,3), rebroussement tout point de type (2,3) . Une courbe admettant l'origine comme point de type (ω,ω') se représente, avec une uniformisante convenable, par

$$x = \alpha\, t^{\omega} + \dots\dots$$
$$y = \beta t^{\omega'} + \dots\dots$$

où $\alpha.\beta \neq 0$ α,β éléments du corps.

Si $\omega = 1$ on peut prendre x comme uniformisante.

Une transformation projective qui laisse invariants les points et la droite Ox se note

$$x = \frac{\ell_1 x_1 + w y_1}{1 + u x_1 + v y_1}$$

$$y = \frac{\ell_2 y_1}{1 + u x_1 + v y_1} \qquad (1)$$

où $\ell_1 . \ell_2 \neq 0$

Un changement d'uniformisante se note

$$t = \lambda t_1 + \ldots\ldots \quad \text{où } \lambda \neq 0$$

de tels changements ne modifient pas le type (ω,ω')

La tangente à une courbe a pour équation

$$x'(\xi + y'\eta) + (xy' - yx')\zeta = 0$$

La courbe duale est représentée en coordonnées homogènes par

$$\left|\begin{array}{l} x' = \omega t^{\omega-1} + \ldots\ldots \\ y' = \omega' t^{\omega'-1} + \ldots\ldots \\ xy' - yx' = (\omega'-\omega)\, t^{\omega+\omega'-1} + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

En caractéristique 0 nous avons les résultats suivants: il existe une uniformisante telle que $x = t^{\omega}$, la branche duale d'une branche de type (ω,ω') est de type $(\omega'-\omega,\omega')$. Il y a en particulier dualité entre inflexion et rebroussement. Ces propriétés ne sont plus valables sans restrictions en caractéristique p.

Si p ne divise pas ω on peut choisir l'uniformisante de façon que

$$x = t^{\omega}$$

Si p divise ω, ce n'est pas toujours possible, par exemple la courbe

$$x = t^p + t^{p+1}$$

$$y = t^{\omega'} + \ldots\ldots$$

où

$\omega' \geq p+2$ n'admet pas d'uniformisante et de choix convenable de coordonnées de façon que $x = t^p$

Si p ne divise aucun des nombres $\omega, \omega', \omega' - \omega$, la branche duale est de type $\omega' - \omega, \omega'$

Remarque:

Cette propriété ne se produit jamais quand p = 2; par exemple un point ordinaire donne:

$$y = x^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5$$
$$y' = ax^2 + cx^4 + \ldots\ldots$$
$$xy' - y = x^2 + bx^4 + \ldots\ldots$$

La tangente

$$\{ + 1\} (ax^2 + cx^4) + x^2 \{ = 0$$

Le point caractéristique de la tangente n'est pas l'origine. Le paramètre n'est plus x mais x^2. En caractéristique p = 2 toute courbe est spéciale, c'est à dire n'est pas l'enveloppe de ses tangentes.

Si p divise ω' et ne divise pas ω et si $\omega \geqslant 2$, nous dirons que la singularité est faible si la série formelle représentant y admet un terme en $t^{\omega'+1}$, forte dans le cas contraire. Cette propriété est invariante par changement permis de coordonnées ou d'uniformisante. Le dual d'une singularité faible (ω,ω') où p divise ω' est de type $(\omega'-\omega+1, \omega')$

Rebroussement en caractéristique 3

Supposons le rebroussement à l'origine, la tangente étant Ox; au moyen d'une uniformisante convenable (par exemple y/x) on peut représenter x,y par des séries formelles

$$x = \alpha t^2 + 0(t^3)$$
$$y = \beta t^3 \alpha + \gamma t^4 + 0(t^5)$$

$\alpha.\beta \neq 0$

On désigne de façon générale par $0(t^n)$ une série formelle dont tous les termes sont de degré $\geqslant n$

Les deux changements donnent la représentation

$$x' = \alpha' t^2 + 0(t^3)$$
$$y' = \beta' + \gamma t^4 + 0(t^5)$$

où $\alpha' = \ell_1 \lambda^2 \alpha$, $\beta' = \ell_2 \lambda^3 \beta$, $\gamma = \ell_2 \lambda^4$

α' et β' sont évidemment $\neq 0$

On voit de plus que $\gamma \neq 0$ si et seulement si $\gamma' \neq 0$

Nous appellerons rebroussement faible un rebroussement pour lequel $\gamma \neq 0$; rebroussement fort un rebroussement pour lequel $\gamma = 0$

L'équation cartésienne d' une courbe munie d'un rebroussement en O avec tangente Ox s'écrit

$$y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + \ldots\ldots = 0$$

où les points de suspension représentent des termes de degré > 3

Le rebroussement fort est caractérisé par la condition $b = 0$ qui est invariante par les transformations (1)

La différence entre les deux types de rebroussement apparaît particulièrement sur la courbe duale.

$$\left|\begin{array}{l} x' = -\alpha t + 0(t^3) \\ y' = \gamma t^3 + 0(t^4) \\ xy' - yx' = \alpha\beta t^4 + \alpha\gamma t^5 + 0(t^6) \end{array}\right.$$

La courbe duale C^* est représentée avec des coordonnées convenables par

$$\left\{\begin{array}{l} X = \gamma t^2 + 0(t^3) \\ Y = \beta t^3 - \alpha t^4 + 0(t^6) \end{array}\right.$$

Si le rebroussement initial est faible, $\gamma \neq 0$ la courbe C^* admet l'image de O comme rebroussement faible.

Un rebroussement faible est une singularité autoduale et non duale d'un rebroussement comme en caractéristique O.

En faisant $\gamma = 0$ on voit que la singularité duale d'un rebroussement fort est d'ordre 3.

Nous appellerons classe d'un point (ou d'une place) l'ordre de la singularité duale.

Etude plus précise de rebroussement fort

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + at^5 + bt^6 + ct^7 + 0\,(t^8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = t \\ y' = -at^4 + ct^6 + 0(t^7) \end{cases}$$
$$xy' - yx' = t^4 + bt^7 + ct^8 + 0(t^9)$$

si $c \neq 0$, la singularité duale est de type (3,5)

Point de type (1,h) en caractéristique 3

$$y = x^h + ax^{h+1} + \ldots\ldots$$
$$y' = hx^{h-1} + a(h+1)\,x^h + \ldots\ldots$$
$$xy' - y = (h-1)\,x^h + ah\,x^{h+1} + \ldots\ldots$$

Si $h \equiv 2 \bmod 3$, la branche duale est de type (h-1,h), si $h \equiv 1 \bmod 3$ la branche duale est d'ordre h-1, son type est (h-1,h+1) si $a \neq 0$

Une transformation de type (1) ne change pas le fait que a soit nul ou soit non nul.

Si $a \neq 0$ nous dirons que le point est de type (1,h) faible; si $a = 0$ nous dirons que le point est de type (1,h) fort.

Si $h = 0 \bmod 3$, la branche duale est d'ordre h, le point est spécial
L'inflexion comme le rebroussement fort est de classe 3

Point de type (3,4) en caractéristique 3

$$\begin{cases} x = t^3 + at^5 + \ldots\ldots \\ y = t^4 + bt^5 + \ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -at^4 + 0(t^6) \\ y' = t^3 - bt^4 + 0(t^6) \end{cases}$$
$$xy' - yx' = t^6 - bt^7 - at^8$$

si $a \neq 0$, le dual est de type (1,3)
si $a = 0$, le dual est d'ordre 3

Point de type (3,5) en caractéristique 3

$$\begin{cases} x = t^3 + at^4 + 0(t^6) \\ y = \quad t^5 + bt^6 + ct^7 + \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = at^3 + 0(t^6) \\ y' = -t^4 + ct^6 + 0(t^7) \end{cases}$$

$$xy'-yx' = -t^7 - at^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Si $a \neq 0$ le dual est de type (1,4)

S'il n'y a pas dans x des termes en t^4 :

$$x = t^3 + at^6 + bt^7$$
$$y = \quad t^5 + ct^6 + dt^7 + \ldots\ldots$$

$$x' = bt^6 + \ldots\ldots$$
$$y' = -t^4 + dt^6$$
$$xy'-yx' = -t^7 + dt^9 + \ldots\ldots$$

Le dual est alors un rebroussement fort.

Si les termes en t^4 et t^6 sont absents le dual est d'ordre 3.

Chapitre III

Majorations du nombre de points d'inflexion d'une courbe sur un corps de caractéristique p

1ère partie : La caractéristique du corps est $p \geq 3$

Nous avons vu qu'un point simple d'une courbe irréductible F est un point d'inflexion si et seulement si la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire de ce point est une composante de la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire. Nous allons chercher dans ce qui suit le nombre maximum de points de F pour lesquels cette condition est satisfaite dans le cas où le corps de base est de caractéristique ≥ 3. Pour la commodité des opérations nous supposerons que le corps de base K est parfait. Nous étudierons dans une seconde partie le cas où K est de caractéristique p = 2

Pour commencer voyons dans quel cas une conique sur un corps de caractéristique $p \neq 2$ est réductible.

Réductibilité d'une conique sur un corps de caractéristique $p \geq 3$

Théorème : Une conique Q d'équation

$$\sum a_{i,j}\, x_i\, x_j = 0 \qquad \text{avec} \quad a_{i,j} = a_{j,i}$$

sur un corps de caractéristique $p \neq 2$ est réductible si et seulement si le déterminant $|a_{i,j}|$ est nul .

En effet Q est réductible si et seulement si elle possède un point double. Ce qui implique que les dérivées premières sont nulles en un point de la conique. Soit (x_1, x_2, x_3) ce point. Nous avons alors le système

$$2 \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\, x_j = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3$$

et les x_j ne sont pas tous nuls. Puisque nous supposons que $p \neq 2$ le déterminant $|a_{i,j}|$ doit être nul.

Réciproquement si ce déterminant est nul le système I admet une solution non triviale. Mais la formule d'Euler nous donne

$$\sum_{i=1}^{3} \left(2 \sum a_{i,j}\, x_j\right) x_i = 2 \sum_{i,j} a_{i,j}\, x_i\, x_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} (2 \sum a_{i,j}\, x_j)\, x_i = 2 \sum_{i,j} a_{i,j}\, x_i x_j = 0$$

Donc $\sum_j a_{i,j}\, x_j = 0$ entraine $\sum_{i,j} a_{i,j}\, x_i\, x_j = 0$

Il en résulte que (x_1, x_2, x_3) est un point de Q, de plus les dérivées premières de Q sont toutes nulles en ce point. Donc c'est un point double et la conique Q est réductible . D'où le résultat annoncé.

Caractérisation de la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire d'un point P de la courbe

D'après les hypothèses faites sur la caractéristique, la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire d'un point (x,y,z) de F a pour équation

$$\frac{1}{2!}\left(X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + Z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0$$

Ce qui s'écrit encore en négligeant le facteur $\frac{1}{2!}$

$$Q(X,Y,Z) = X^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + Y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2XY \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + 2YZ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} + 2XZ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}$$

C'est une conique dont les dérivées partielles au point (x,y,z) sont:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + 2z \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = (n-1) \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \qquad\qquad = (n-1) \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \qquad\qquad = (n-1) \frac{\partial f}{\partial z}$$

En utilisant 2 fois la formule d'Euler, on vérifie que le point (x,y,z) est un point de Q car

$$Q(x,y,z) = n(n-1)\, f(x,y,z)$$

Nous avons à distinguer 2 cas:

1°) $n \equiv 1 \bmod p$. Les dérivées premières de Q sont alors nulles pour tout point P de F. La (n-2) ième polaire est donc toujours réductible.

2°) $n \not\equiv 1 \bmod p$. Les dérivées 1ères de Q ne sont nulles que si les dérivées 1ères de F le sont; autrement dit dans le cas où le point P est double pour F. Nous négligeons ce cas dans la recherche des points d'inflexion de F . Dans le cas général Q est irréductible si $n \not\equiv 1 \bmod p$

Théorème

La (n-2)ième polaire d'un point générique P d'une courbe n est

1°) une conique irréductible si $n \not\equiv 1 \bmod p$

2°) une conique réductible si $n \equiv 1 \bmod p$

Remarque:

Ce qui vient d'être dit n'est vrai que pour des courbes en général, car il existe des courbes pour lesquelles Q est toujours réductible même lorsque $n \not\equiv 1 \bmod p$ (cas des courbes à une infinité de points d'inflexion)

Nombre de points d'inflexion d'une courbe d'ordre n, $n \not\equiv 1 \bmod p$ sur un corps de caractéristique ≥ 3

La (n-2)ième polaire est représentée par la conique Q ci-dessus. Supposons que le point (x,y,z) soit simple. La tangente en ce point a pour équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

c'est une tangente d'inflexion si nous avons

$$Q(X,Y,Z) = 0$$

(X,Y,Z) étant le point générique de la tangente. Ce qui implique que Q doit être réductible. Comme nous l'avons vu ci-dessus ceci n'est vrai que si

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0$$

Si (x,y,z) est un point d'inflexion, il appartient à la courbe H. Supposons maintenant que le point (x,y,z) soit simple sur F et qu'il appartiennent à H

$$H(x,y,z) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = 0$$

La conique Q est alors réductible. Montrons maintenant que F et Q ont même tangente au point (x,y,z). Tout d'abord le point (x,y,z) appartient à Q. En effet nous avons:

$$Q(x,y,z) = \sum_{x,y} f''_{xy}\, xy = n(n-1)\, f(x,y,z) = 0$$

La tangente en (x,y,z) à Q a pour équation

$$\sum_{x,y} f''_{xz}\, xY = (n-1)\left[f'_x X + f'_y Y + f'_z Z\right] = 0$$

Puisque $n \not\equiv 1 \bmod p$ nous devons avoir

$$f'_x X + f'_y Y + f'_z Z = 0$$

qui est la tangente à F en (x,y,z) . Ce qui montre que F et Q ont même tangente et puisque Q se compose de deux droites dont une seule passe par (x,y,z). La tangente à F est cette composante de Q. Le point (x,y,z) est donc 1 point d'inflexion de F

Théorème

Soit F une courbe d'ordre n ($n \not\equiv 1 \bmod p$) sur un corps de caractéristique $p \geqslant 3$. Les points d'inflexions de F sont les points simples de F qui appartiennent à la courbe H appelée hessienne de F.

Si F est d'ordre n,H est d'ordre 3(n-2). On a alors le résultat suivant

Théorème

Le nombre de points d'inflexion d'une courbe F d'ordre n, où $n \not\equiv 1 \bmod p$, est inférieur ou égal à 3n(n-2)

On a un résultat plus précis sur un corps de caractéristique 3
On démontre en effet que le nombre de points d'inflexion irréductible d'ordre n , $n \equiv 1$ ou non mod3 est égal à n(n-2) (en comptant convenablement la multiplicité) exception faite de quelques courbes particulières qui ont une infinité de points d'inflexion (1)

Nous donnons ci-dessous une démonstration de ce résultat dans le cas où $n \equiv 1 \bmod 3$

Une démonstration semblable peut être faite dans le cas où $n \equiv 0 \bmod 3$ ou $n \equiv 2 \bmod 3$ en écrivant l'équation de F sous la forme suivante

1°) $n \equiv 0 \bmod 3$

$$f(x,y,z) = x^2yA + y^2zA' + z^2xA'' + xy^2B + yz^2B' + zx^2B'' + xyzC + x^2y^2C' + C'' = 0$$

2°) $n \equiv 2 \bmod 3$

$$f(x,y,z) = x^2A + y^2A' + z^2A'' + xyB + yzB' + zxB'' + xy^2z^2c + yz^2x^2c' + zx^2y^2c'' = 0$$

où les grandes lettres désignent des fonctions en x^3, y^3, z^3 c'est à dire puisque le corps de base est supposé parfait des cubes des polynômes. Ici on prend la hessienne en se laissant guider le raisonnement que nous donnons pour le cas $n \equiv 1 \bmod p$

---

(1) Cf géométrie infinitésimale des courbes algébriques planes ou gauches sur un corps de caractéristique p (L. Gauthier)

Démonstration du résultat énoncé ci-dessus au cas ou $n \equiv 1 \bmod 3$

Toute courbe d'ordre $n = 3k+1$ peut se mettre (d'une manière unique) sous la forme

$$f = Ax+A'y+A''z+By^2z^2+B'z^2x^2+B''x^2y^2+Cx^2yz+C'xy^2z+C''xyz^2 = 0$$

Les grandes lettres désignent des fonctions de x^3, y^3, z^3, c'est à dire puisque le corps K est parfait, des cubes de polynômes, ces fonctions ont des dérivées nulles par rapport à toutes les variables; A, A', A'' sont de degré $3k$; B, B', B'', C, C', C'' sont de degré $3k-3$:

Ce sont des constantes quand f est une quartique.

Nous avons vu que dans ce cas la $(n-2)$ ième polaire de tout point de la courbe est réductible, donc la hessienne (au sens vu plus haut) est évanouissante et ne peut servir à déterminer les inflexions.

Les points d'inflexion se retrouvent sur la courbe H_o d'ordre $3n-4$ d'équation

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui s'écrit encore

$$H_o = f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}\, f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2 = 0$$

L'annulation de H_o exprime que le point à l'infini de la $(n-1)$ième polaire $Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$ se trouve sur la $(n-2)$ième polaire

$$\left(X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z) = 0$$

Si le point (x,y,z) est à distance finie, l'équation exprime que la $(n-1)$ième polaire divise la $(n-2)$ième;

En dehors des points à l'infini qui sont des solutions étrangères les points d'intersection de H_o et f sont les points d'inflexion

$$\begin{cases} f'_x = A - B'xz^2 - B''xy^2 - Cxyz + C'y^2z + C''yz^2 \\ f'_y = A' - B''yx^2 - Byz^2 + Cx^2z - C'xyz + C''xz^2 \\ f'_z = A'' - Bzy^2 - B'zx^2 + Cx^2y + C'xy^2 - C''xyz \end{cases}$$

Ordonnons f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} se on les puissances croissantes de z

$$\begin{cases} f''_{x^2} = - By^2 - Cyz - B' z^2 \\ f''_{xy} = B''xy - Cxz - C'yz + C''z^2 \\ f''_{y^2} = -B''x^2 - C'xz - Bz^2 \end{cases}$$

$$H_o = - B''(xf'_x+yf'_y)^2 - (C'f'_x+Cf'_y)(xf'_x+yf'_y)(xf'_x+yf'_y)z -$$
$$- \left[B(f'_x)^2 - C''f'_xf'_y + B'(f'_y)^2\right] z^2$$

$$x f'_x + y f'_y = f - zf'_z$$

Les points d'intersection de H_o et f sont sur la courbe H = 0

$$H = B(f'_x)^2 + B'(f'_y)^2 + B''(f'_z)^2 - Cf'_y.f'_z - C'f'_z.f'_x - C''f'_x.f'_y = 0$$

qui pourrait s'écrire aussi

$$H = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial z^2}(f'_x)^2 + \frac{\partial^4 f}{\partial z^2\, \partial x^2}(f'_y)^2 + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}(f'_z)^2 + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z}.f'_y.f'_z$$

$$+ \frac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial z\, \partial x} f'_z.\, f'_x + \frac{\partial^4 f}{\partial z^2\, \partial x\, \partial y} f'_x \cdot f'_y = 0$$

H est d' ordre 3n-6 = 9k-3, c'est une covariante de f; nous l'appelerons la pseudo-hessienne de f

$$H_o = - B''(f^2 - 2zff'_z) - fz(C'F'_x + Cf'_y) - z^2 H$$

La pseudo-hessienne s'évanouit si la courbe f est spéciale c'est à dire si f = Ax + A'y + A" z ; dans ce cas tous les points sont inflexionnels

Désignons par $\tilde{B}$, $\tilde{B}'$, $\tilde{B}''$, $\tilde{C}$, $\tilde{C}'$, $\tilde{C}''$ les coefficients des éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} B, & C'', & C' \\ C'' & B' & C \\ C' & C & B'' \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{B} = B'B'' - C^2$$
$$\widetilde{B'} = B''B - C'^2$$
$$\widetilde{B''} = BB' - C''^2$$
$$\widetilde{C''} = CC' - B''C''$$
$$\widetilde{C'} = CC'' - B'C'$$
$$\widetilde{C} = C'C'' - BC$$

On a les relations

$$\left|\begin{array}{l} Bf'_x + C''f'_y + C'f'_z = U - xL + \widetilde{B}x^3 \\ C''f'_x + B'f'_y + Cf'_z = U' - yL + \widetilde{B'}y^3 \\ C'f'_x + Cf'_y + B''f'_z = U'' - zL + \widetilde{B''}z^3 \end{array}\right.$$

Où

$$L = \widetilde{B}x^2 + \widetilde{B'}y^2 + \widetilde{B''}z^2 - \widetilde{C}yz - \widetilde{C'}zx - \widetilde{C''}xy$$
$$U = AB + A'C'' + A''C'$$
$$U' = AC'' + A'B' + A''C$$
$$U'' = AC' + A'C + A''B''$$

En posant

$$\overline{U} = U + \widetilde{B}x^3$$
$$U' = U' + \widetilde{B'}y^3$$
$$\overline{U''} = U'' + \widetilde{B''}z^3$$

On obtient

$$H = \overline{U}f'_x + \overline{U'}f'_y + \overline{U''}f'_z - fL$$

$$\left|\begin{array}{ll} f'_x & \overline{U} = (AB + A'C' + A''C'') + x^3\widetilde{B} \\ f'_y & \overline{U'} = (AC'' + A'B' + A''C) + y^3\widetilde{B} \\ f'_z & \overline{U''} = (AC' + A'C + A''B'') + z^3\widetilde{B''} \end{array}\right.$$

$$\overline{U}f'_x + \overline{U'}f'_y + \overline{U''}f'_z = A\overline{U} + A'\overline{U'} + A''\overline{U''} - (Ax + A'y + A''z)L - x^3Bf'_x - y^3B'f'_y - z^3Bf'_z$$

Pour démontrer que H-fL est un cube, il suffit de montrer, en posant

$$f = Ax + A'y + A''z + g \text{ , que}$$

$$x^3\widetilde{B}g'_x + y^3\widetilde{B'}g'_y + z^3\widetilde{B''}g'_z = -L(By^2z^2 + B'z^2x^2 + B''x^2y^2 + Cx^2yz + C'xy^2z + C''xyz^2)$$

modulo les cubes

Pour conduire le calcul, nous montrons d'abord l'égalite pour $z = 0$; on obtient

$$x^3\tilde{B}(-B''xy^2)+y^3\tilde{B}(-B''yz^2) = -(\tilde{B}x^2+\grave{B}'y^2+C''xy)\ B''x^2y^2+B''C''x^3y^3$$

l'expression soulignée est un cube. Il no reste plus qu'à vérifier l'égalité des termes divisibles par xyz; on obtient termes en $x^2y^2z^2$

$$0=B(B'B''-C^2)+B'(B''B-C'^2) + B''(BB' - C''^2) - C(C'C'' - BC) - C'\ (C''C - B'C')$$
$$- C''\ (CC' - B''C'')$$

termes en x^4yz

$$- \grave{B}C' = - \grave{B}\,C$$

termes en x^3y^2z

$$+\tilde{B}C' = - \tilde{B}C' + \tilde{C}''C + \tilde{C}'B''$$

Tout autre terme s'obtient par permutation des variables. D'où

$$H - fL = \Gamma^3$$

où Γ est un polynôme de degré (n-2)

Ainsi les points d'inflexion de la courbe f d'ordre $n \equiv 1 \bmod 3$ sont donc au nombre de $n(n-2)$ (au lieu de $3n(n-2)$), en caractéristique 3

Courbes irréductibles d'ordre $n \not\equiv 1 \bmod p$ possédant une infinité de points d'inflexion ($p \geqslant 3$)

Soit F une courbe irréductible d'ordre $n \not\equiv 1 \bmod p$. Supposons que pour tout point de F nous avons $f'_z = 0$. Dans ce cas la hessienne a pour équation

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & 0 \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Il en résulte que H est identiquement nul. Autrement dit tout point de F est sur la hessienne. Les points simples de F sont tous inflexionnels.

Etudions plus en détail le cas de la cubique en caractéristique 3

Si une cubique est telle que $f'_z = 0$ son équation est de la forme

$$f = hf_1^3 + \varphi(x,y) = 0$$

Si f'_x est nulle aussi on a une droite triple. Dans le cas général si h est nul, f est un système de trois droites concourantes.

Si h n'est pas nul la courbe ne passe pas par le point de polaire évanouissante;

$f = hz^3 + ax^3 = bx^2y + cxy^2 = dy^3$

f'_x et f'_y s'annulent sur la droite

$$bx - cy = 0$$

(cette droite ne s'évanouit pas si f n'est pas une droite triple)

Par changement d'axe la droite se ramène à $y = 0$.

On obtient

$$(ux + vy + wz)^3 + hxy^2 = 0$$

En changeant encore on se ramène à la forme:

$$z^3 + xy^2 = 0$$

On a un rebroussement. On remarque que le point $x = 0$, $y = 0$ a polaire évanouissante n'est pas sur la courbe.

Sa polaire contient la droite finie $y = 0$ (tangente à rebroussement)

La tangente en un point est

$$Xy^2 - Yxy = 0 \text{ c'est à dire } Xy - Yx = 0$$

Elle passe par la polaire évanouissante (un point est à polaire évanouissante si toutes les tangentes passent par lui). Elles sont toutes inflexionnelles.

Cas où il n'y a pas de polaire évanouissante

f'_z ne contient pas de termes en z^2, la polaire de tout point passe par le point considéré

Comme $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$

(ce qui est valable pour toute courbe d'ordre 3k, tout point tel que $z \neq 0$ commun à f'_x et f'_y appartient à f'_z

De plus tout point commun à $f'_x = 0$ et $z = 0$ et autre que $y = z = 0$ appartient à f'_y

On cherche si tout point peut avoir une polaire décomposée

Supposons

1°) $f'_z = xy$

2°) $f'_z = -xz$

3°) $f'_z = x^2$

1°) $f = xyz + hz^3 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$

$$\left|\begin{array}{l} f'_x = yz - bxy + cy^2 \\ f'_y = xz + bx^2 - cxy \end{array}\right.$$

Toutes les polaires passent par le point $x = 0 \quad y = 0$

Remarque:

si $h = 0$ le point commun aux polaires est un point double

2°) $f = xz^2 + z^3 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$

$$\left|\begin{array}{l} f'_x = z^2 - bxy + cy^2 \\ f'_y = bx^2 - cxy \end{array}\right.$$

si $c \neq 0$ il y a deux points sur toutes les polaires

$x = 0$ et $z = \pm c' y^2$

où $\quad c'^2 = -c$

si $c = 0$ f s'écrit

$$f = xz^2 + hz^3 + ax^3 + bx^2y + dy^3$$

$$\left|\begin{array}{l} f'_x = z^2 - bxy \\ f'_y = bx^2 \\ f'_z = -xz \end{array}\right.$$

Toutes les polaires sont des osculatrices en 1 même point $(x=z=0)$ qui n'est pas sur la cubique

3°) $f = x^2z + hz^3 + ax^3 + bx^2y + cy^2x + dy^3$

$$\left|\begin{array}{l} f'_x = -xz - bxy + cy^2 \\ f'_y = bx^2 - cxy \end{array}\right.$$

Toutes les polaires passent par $x = 0$ et $y = 0$

On voit que les points dont les polaires se décomposent sont sur un nombre fini de droite donc sont exceptionnels

Si $c = 0$ dans le 3° cas toutes les polaires ont une droite commune et on se ramène à la cubique à rebroussement.

Majoration des points d'inflexion d'une courbe irréductible d'ordre $n \equiv 1 \bmod p$ ($p \geq 5$) définie sur un corps de caractéristique p

Nous allons chercher à majorer le nombre de points d'inflexion de F dans le cas où la caractéristique est supérieure à 3 et ou l'ordre de la courbe est $n \equiv 1 \bmod p$

La (n-2)ième polaire de tout point est réductible et se compose généralement de deux droites. La hessienne est alors évanouissante et ne donne aucun renseignement sur les points d'inflexion de F. Néanmoins il est possible de majorer les points d'inflexion dans le cas général en étudiant le système

$$\begin{cases} Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0 & (1) \\ X^2 f'_{x^2} + Y^2 f''_{y^2} + Z^2 f''_{z^2} + 2YZf''_{yz} + 2Zf''_{xz} + 2YXf''_{xz} = 0 & (2) \end{cases}$$

Nous cherchons les points de F pour lesquels la droite (1) est une composante de la conique (2). F étant irréductibles et les points que nous considérons étant simples, nous pouvons supposer que $f'_z \neq 0$ et nous obtenons

$$Z = -(f'_z)^{-1} (f'_x X + f'_y Y)$$

et en remplaçant dans (2) Z par cette valeur

$$X^2 \left[f''_{x^2} (f'_z)^2 - 2f''_{xz} f'_z f'_x + f''_{z^2} (f'_x)^2 \right]$$

$$+ 2YX \left[f''_{xy} (f'_z)^2 - f''_{xz} f'_z f'_y - f''_{yz} f'_z f'_x + f''_{z^2} f'_x f'_y \right]$$

$$+ Y^2 \left[f''_{y^2} (f'_z)^2 - 2f''_{yz} f'_z f'_y + f''_{z^2} (f'_y)^2 \right] = 0$$

Pour que (1) soit une composante de (2) il faut que l'équation ci-dessus soit identiquement nulle. Ce qui implique

$$\left|\begin{array}{l} f''_{x^2}(f'_z)^2 - 2f''_{xy}f'_z f'_x + f''_{z^2}(f'_x)^2 = 0 \\ f''_{xy}(f'_z)^2 - f''_{xz}f'_z f'_y - f''_{yz}f'_z f'_x + f''_{z^2}f'_x f'_y = 0 \\ f''_{y^2}(f'_z)^2 - 2f''_{yz}f'_z f'_y + f''_{z^2}(f'_y)^2 = 0 \end{array}\right. \quad \text{I}$$

Chacune de ces équations représente une courbe d'ordre 2n-4. De plus le point (x,y,z) doit être un point de la courbe. Il en résulte que le nombre de points d'inflexion est au plus n(3n-4)

Théorème

Le nombre de points d'inflexion d'une courbe irréductible d'ordre $n \equiv 1 \bmod p$ sur un corps de caractéristique p est au plus égal à n(3n-4)

Remarque:

On suppose bien entendu qu'une au moins des équations du système (I) représente une courbe c'est à dire que le système (I) n'est pas une identité auquel cas tous les points simples de f sont des points d'inflexion. C'est ce qui arrive par exemple si l'on considère la courbe d'équation

$$f = xA + yB + zC = 0$$

où A,B,C sont des éléments de $K\left[x^p, y^p, z^p\right]$

Courbes particulières d'ordre $n \equiv 1 \bmod p$ $(p \geq 5)$

Soit F une courbe d'ordre $n \equiv 1 \bmod p$. Supposons que

$$f''_{xz} = f''_{yz} = f''_{z^2} = 0 \text{ pour tout point de F.}$$

Son équation s'écrit alors d'une seule manière sous la forme.

$$f = xA + yB + zC + \sum_{i=2}^{p-1} D_i\, x^{p+1-i}\, y^i = 0$$

où A,B,C sont des polynômes homogènes en (x^p, y^p, z^p) d'ordre (n-1). Les D_i sont homogènes en (x^p, y^p, z^p) et sont d'ordre (n-p-1)

L'équation de la tangente au point (x,y,z) est

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

c'est à dire

$$\left(A + \sum_{i=2}^{p-1} (p+1-i) D_i x^{p-i} y^i\right)X + \left(B + \sum_{i=2}^{p-1} i D_i x^{p+1-i} y^{i-1}\right) Y + CZ = 0 \qquad (1)$$

La (n-2) ième polaire Q a pour équation

$$X^2 f''_{x^2} + 2XYf''_{xy} + Y^2 f''_{y^2} = 0$$

Soit

$$\left(\sum_{i=2}^{p-1} (p-i)(p+1-i)D_i\, x^{p-i-1}\, y^i\right) X^2 + 2\left(\sum_{i=2}^{p-1} i(p+1-i)D_i x^{p-i} y^{i-1}\right)XY +$$

$$+ \left[\sum_{i=2}^{p-1} i(i-2)D_i\, x^{p+1-i}\, y^{i-2}\right] Y^2 = 0$$

Ce qui donne en tenant compte du fait que p est la caractéristique du corps de base.

$$\left(\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)\, D_i x^{p-i-1}\, y^i\right)X^2 - 2\left(\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)\, D_i x^{p-i}\, y^{i-1}\right) XY +$$

$$+ \left(\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)\, D_i\, x^{p+1-i}\, y^{i-2}\right)^2 Y = 0$$

En mettant $i(i-1)D_i\, x^{p-i-1}\, y^{i-2}$ en facteur dans chaque terme (ce qui a un sens puisque $2 \leqslant i \leqslant p-1$) nous obtenons:

$$Q(X,Y,Z) = \left[\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)D_i\, x^{p-i-1}\, y^{i-2}\right]\left[y^2X^2 - 2xyXY + x^2Y^2\right] = 0$$

$$= \left[\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)\, D_i\, x^{p-i-1}\, y^{i-2}\right]\left[yX - xY\right]^2 = 0 \qquad (2)$$

1°) si $\sum_{i=2}^{p-1} i(i-1)\, D_i\, x^{p-i-1}\, y^{i-2} = 0$ (3)

La (n-2)ième polaire est alors évanouissante et le point (x,y,z) correspondant est un point d'inflexion. Puisque nous supposons que p est $\geqslant 5$ l'ordre du terme $n^{p-1-i}\, y^{i-2}$ est $p-i-1+i-2 = p-3 > 0$

Le premier membre de (3) est un élément de K $[x,y,z]$ mais non de K $[x^p, y^p, z^p]$ L'équation (3) représente donc une courbe qui n'est pas multiple d'ordre p. Le nombre de points communs à F et à cette courbe est n(n-4) car l'ordre de (3) est (n-4)

Donc le nombre de points d'infloxion obtenu de cette façon est inférieur ou égal à n(n-4)

2°) $\sum_{i=2}^{p-1} (i(i-2)\, D_i\, x^{p-1-i}\, y^{i-2} \neq 0$

Q se compose alors d'une droite comptée deux fois '. Elle passe par le point fixe et $X = 0$ et $Y = 0$

La tangente (1) est alors inflexionnelle si elle est confondue avec la droite

$$yX - xY = 0$$

en particulier si elle passe par le point $X = 0$ et $Y = 0$.

Pour cela il faut et il suffit que

$$C(x^p, y^p, z^p) = 0$$

Dans le cas où la (n-2)ième polaire n'est pas évanouissante les points d'inflexion de F sont les points simples de F qui se trouvent sur la courbe

$$C(x^p, y^p, z^p) = \left[C_1(x,y,z)\right]^p$$

Le nombre de ces points qui sont distincts sont au plus au nombre de $\frac{1}{p}$ $n(n-1)$

Le nombre de points d'inflexion de F est au plus

$$n(n-4) + \frac{1}{p}\, n(n-2) = \frac{1}{p}\, n \left[(n-1) + p(n-4)\right]$$

Remarque:

Si dans ce qui précède nous avions

$C \equiv 0$ c'est à dire si $f'_z = 0$

pour tout point de F on aurait une infinité de points d'inflexion

Remarque:

Si l'équation de F s'écrit

$$f(x,y,z) = xA + yB + zC = 0 \qquad (p \geqslant 3)$$

où A,B,C sont des éléments de l'anneau $K\left[x^p, y^p, z^p\right]$ la(n-2)ième polaire du point générique est évanouissante. De telles courbes sont désignées ici sous le nom de courbes spéciales. Elles possèdent des propriétés particulières dont nous exposerons quelques unes plus loin.

Nous allons maintenant étudier les points d'inflexion d'une courbe définie sur un corps de caractéristique 2.

2ème partie : Points d'inflexion d'une courbe définie sur un corps de caractéristique p = 2

Nous allons répartir l'étude en deux parties principales

1°) l'ordre n est un entier pair

2°) l'ordre n est un entier impair

Courbes dont l'ordre est un entier pair

Soit n l'ordre de la courbe F supposée irréductible . Soit P un point simple de F. On peut supposer que P est le point (0,0,1) et que la tangente en ce point à la courbe est la droite X = 0 (en effectuant un changement de coordonnées si c'est nécessaire)

Ordonnons l'équation f = 0 suivant les puissances décroissantes de Z. f s'écrit alors

$$f(X,Y,Z) = X\,Z^{n-1} + \varphi_2(X,Y)\,Z^{n-2} + \ldots\ldots + \varphi_n(X,Y) = 0$$

φ_i est homogène et de degré i par rapport à X et Y. Cherchons la $(n-2)^{ième}$ polaire du point (0,0,1)

Pour cela formons f((x) + (X)) au point (0,0,1)

$$f(X,Y,1+Z) = X(1+Z)^{n-1} + \varphi_2(X,Y)\ (1+Z)^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$f(X,Y,Z) = X + XZ + \varphi_2(X,Y) + \ldots\ldots\ldots$$

La $(n-2)^{ième}$ polaire de (0,0,1) est l'expression homogène de degré 2 dans cette équation c'est à dire $XZ + \varphi_2(X,Y)$

$$Q(X,Y,Z) = XZ + \varphi_2(X,Y) = 0$$

Voyons dans quel cas cette conique est réductible. Posons

$$\varphi_2(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$$

où a,b,c appartiennent au corps de base. Q prend alors la forme:

$$Q(X,Y,Z) = ZX + aX^2 + bXY + cY^2 = 0$$

Considérons le système

$$\begin{cases} f'_X = Z+bY = 0 \\ f'_Y = bX = 0 \\ f'_Z = X = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solution (0,1,b) qui est le point fixe de la tangente à Q. Q se décompose si et seulement si ce point est sur Q c'est à dire si nous avons

$$0 + 0 + 0 + c = 0$$

Ce qui implique que c doit être nul. Dans ce cas la $(n-2)^{ième}$ polaire s'écrit

$$X (Z + aX + bY) = 0$$

la tangente X = 0 est donc une composante de Q et le point (0,0,1) est un point d'inflexion.

Réciproquement si 0,0,1 est un point d'inflexion Q se décompose et comprend comme partie la tangente X = 0 . Ce qui montre que c = 0 et Q s'écrit

$$X (Z + aX + bY) = 0$$

Ce raisonnement étant valable pour tout point simple de F moyennant un changement de coordonnées, nous avons le résultat suivant

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'une courbe F définie sur un corps de caractéristique p = 2 dont l'ordre est un entier pair soit un point d'inflexion est que

1°) le point soit simple

2°) la $(n-2)^{ième}$ polaire soit décomposée

Pour la recherche du nombre maximum de points d'inflexion de F nous allons distinguer deux cas

1°) $n \equiv 2 \bmod 4$

2°) $n \equiv 0 \bmod 4$

1er cas : L'ordre n de la courbe est congru à 2 modulo 4

Supposons tout d'abord que la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique soit évanouissante :

Dans ces conditions, les termes de la forme $x^3y^3\alpha, x^3y^2z\beta$ et tous ceux qui s'en déduisent par permutation circulaire ne figurent pas dans f = 0

α,β sont des éléments de K (x^4,y^4,z^4)

f s'écrit alors

$$f(x,y,z) = x^2a_1 + y^2a_2 + z^2a_3 + xya_4 + yza_5 + zxa_6 + x^2y^2z^2a_7 = 0$$

Les a_i étant des polynômes homogènes de $K(x^4,y^4,z^4)$ La $(n-2)^{ième}$ polaire du point (x,y,z) a pour équation

$$Q(X,Y,Z) = X^2(a_1+y^2z^2a_7) + Y^2(a_2+x^2z^2a_7) = Z^2(a_3+x^2y^2a_7) + XYa_4 + YZa_5 + ZXa_6 = 0$$

Supposons que le point (x,y,z) soit simple. (x,y,z) est simple si et seulement si Q est réductible. Considérons le système

$$\begin{cases} f'_X = Ya_4 + Za_6 = 0 \\ f'_Y = Xa_4 + Za_5 = 0 \\ f'_Z = Ya_5 + Xa_6 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet la solution

$$X = a_5 \; ; \; Y = a_6 \; ; \; Z = a_4$$

Ce point est le point fixe de la tangente à Q . Q est donc réductible si elle passe par ce point c'est à dire si l'on a

$$g(x,y,z) = a_5^2(a_1+y^2z^2a_7) + a_6^2(a_2+x^2z^2a_7) + a_4^2(a_3+x^2y^2a_7) + a_4$$

Les points d'inflexion de F sont donc les points simples de F qui sont sur la courbe d'équation

$$g(x,y,z) = 0$$

Les a_i sont de degré $(n-2)$ sauf a_7 qui est de degré $(n-6)$ $g(x,y,z)$ est de degré $3(n-2)$. Nous avons à distinguer deux cas:

1°) a_7 <u>est identiquement nul</u>

Soit $r(r \geqslant 2)$ le plus grand entier positif tel que f s'écrive sous la forme

$$f = x^2a_1 + y^2a_2 + z^2a_3 + xya_4 + yza_5 + zxa_6 = 0$$

Les a_i sont des polynômes homogènes en $(x^{2^r}, y^{2^r}, z^{2^r})$. Dans ces conditions

$$g(x,y,z) = a_5^2(a_1) + a_6^2a_2 + a_4^2a_3 + a_4a_5a_6 = 0$$

$$= \left[g_1(x,y,z)\right]^{2^r}$$

avec $g_1(x,y,z)$ est un polynôme de degré $\frac{1}{2^r}(n-2)$ en (x,y,z) à coefficient dans le corps de base K puisque K est supposé parfait

La courbe G d'équation $g = 0$ se compose donc de la courbe G_1 comptée 2^r fois Il en résulte que le nombre maximum de points d'inflexion de F est $\frac{1}{2^r}\,3n(n-2)$

De plus la $(n-i)^{ième}$ polaire est évanouissante pour

$$3 \leq i \leq 2^r - 1$$

et la $(n-2^r)^{ième}$ polaire est une droite comptée 2^r fois . Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème

Une courbe irréductible F définie sur un corps de caractéristique p = 2 d'ordre $n \equiv 2 \bmod 4$ dont la $(n-i)^{ième}$ polaire du point générique est évanouissante $(3 \leq i \leq 2^r - 1)$ et la $(n - 2^r)$ polaire est une droite comptée 2^r fois possède au plus $\frac{1}{2^r} 3n(n-2)$ points d'inflexion

2°) a_7 n'est pas identiquement nul

Dans ce cas g s'écrit sous la forme

$$g(x,y,z) = \left[G_2(x,y,z)\right]^2$$

G_2 est un polynôme homogène de degré $\frac{1}{2}3(n-2)$ à coefficient dans K. G se compose donc de la courbe G_2 comptée 2 fois

Le nombre de points distincts communs à G et à F est donc au plus égal à $\frac{1}{2}3n(n-2)$. Ici la $(n-4)^{ième}$ polaire du point générique se compose d'une conique comptée deux fois. On voit immédiatement que si la $(n-4)^{ième}$ polaire est une conique comptée 2 fois (cette conique n'étant pas elle même une droite double) le coefficient de $x^2y^2z^2$ dans l'équation de F n'est pas identiquement nul. Nous avons alors le résultat suivant

Théorème

Une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique p = 2 d'ordre n ($n \equiv 2 \bmod 4$) dont la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique est évanouissante et dont la $(n-4)^{ième}$ polaire est une conique comptée deux fois possède au plus $\frac{1}{2}3n(n-2)$ points d'inflexion.

La $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique de F n'est pas évanouissante

On montre comme ci-dessus que les points d'inflexion de F sont sur une courbe G d'ordre 3(n-2) d'équation

$$g(x,y,z) = 0$$

Mais contrairement à ce qui se passait pour le cas précédent g n'est pas un élément de $K(x^2,y^2,z^2)$

G rencontre donc F au plus en 3n(n-2) points distincts.

Théorème

Une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique p = 2 , d'ordre n ($n \equiv 2 \bmod 4$) dont la $(n-3)^{\text{ième}}$ polaire du point générique n'est pas évanouissante possède au plus $3n(n-2)$ points d'inflexion.

2ème cas : L'ordre n de la courbe est congru à 0 mod 4

L'équation de F s'écrit alors d'une seule manière sous la forme:

$$f(x,y,z) = a_0 + a_1xy^2z + a_2yz^2x + a_3zx^2y + a_4xy^3 + a_5yz^3 + a_6zx^3 +$$

$$+ a_7x^3y + a_8y^3z + a_9z^3x + a_{10}x^2y^2 + a_{11}y^2z^2 + a_{12}z^2x^2 = 0$$

Les a_i sont des polynômes homogènes en (x^4,y^4,z^4) de degré $(n-4)$ sauf a_0 qui est de degré n .

On vérifie que la $(n-3)^{\text{ième}}$ polaire du point générique de F n'est évanouissante que si f s'écrit sous la forme

$$f = \alpha_0 + \alpha_1x^2y^2 + \alpha_2y^2z^2 + \alpha_3z^2x^2 = 0$$
$$\alpha_i \in K(x^4,y^4,z^4)$$

F se composerait d'une courbe d'ordre $\frac{n}{2}$ comptée deux fois. Mais par hypothèse F est irréductible. Il en résulte que pour une courbe irréductible définie sur un corps de caractéristique 2 dont l'ordre est multiple de 4 la $(n-3)^{\text{ième}}$ polaire du point générique n'est jamais évanouissante.

Formons l'équation de la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire du point (x,y,z)

$$Q(X,Y,Z) = X^3\left[yza_3 + xza_6 + xya_7 + y^2a_{10} + z^2a_{12}\right]$$
$$+ Y^2\left[xza_1 + xya_4 + yza_8 + x^2a_{10} + z^2a_{11}\right]$$
$$+ Z^2\left[yxa_2 + yza_5 + zxa_9 + y^2a_{11} + x^2a_{12}\right]$$
$$+ XY\left[z^2a_2 + y^2a_4 + x^2a_7\right] + YZ\left[x^2a_3 + z^2a_5 + y^2a_8\right] + ZX\left[y^2a_1 + x^2a_6 + z^2a_9\right] = 0$$

La tangente à cette conique passe par le point

$$\begin{cases} X = x^2a_3 + z^2a_5 + y^2a_8 \\ Y = y^2a_1 + x^2a_6 + z^2a_4 \\ Z = z^2a_2 + y^2a_4 + x^2a_7 \end{cases}$$

La conique n'étant réductible que si elle passe par le point fixe de la tangente, le point (x,y,z) n'est un point d'inflexion que s'il appartient à la courbe G d'équation

$$g(x,y,z) = (x^2a_3 + z^2a_5 + y^2a_8)^2(yza_3 + xza_6 + xya_7 + y^2a_{10} + z^2a_{12})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ (x^2a_3 + z^2a_5 + y^2a_8)(y^2a + x^2a_6 + z^2a_4)(z^2a_2 + y^2a_4 + x^2a_7) = 0$$

Cette courbe est d'ordre 3(n-2). De plus $g(x,y,z)$ n'appartient pas à $K(x^2,y^2,z^2)$

Théorème

Une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique d'ordre pair possède au plus 3n(n-2) points d'inflexion.

Remarque:

Il résulte de ce qui précède qu'une courbe d'ordre pair définie sur un corps de caractéristique p = 2 possède toujours un nombre fini de points d'inflexion; tandis que, si la caractéristique est supérieure à 2, il existe des courbes dont l'ordre est multiple de la caractéristique qui possèdent une infinité de points d'inflexion.

Courbes dont l'ordre est un entier impair

Soit P un point simple de la courbe. Supposons que P soit le point (0,0,1) et que la tangente en ce point soit la droite X = 0 . Ordonnons l'équation de F suivant les puissances décroissantes de Z f s'écrit alors

$$f(X,Y,Z) = XZ^{n-1} + \Psi_2(X,Y)Z^{n-2} + \ldots\ldots + \Psi_n(X,Y) = 0$$

Ψ_i étant homogène de degré i .

La $(n-2)^{ième}$ polaire du point (0,0,1) par rapport à cette courbe est l'expression homogène de degré 2 dans le développement de

$$f(X,Y,1+Z) = 0$$

$$f(X,Y,Z) = X(1+Z)^{n-1} + \Psi_2(X,Y)\,(1+Z)^{n-2} + \ldots\ldots$$

n étant impair (n-1) est pair et nous avons

$$f(X,Y,Z) = X + \Psi_2(X,Y) + XZ^2 + \Psi_2(X,Y)\,Z + \ldots\ldots\ldots$$

L'expression homogène de degré 2 est alors $\Psi_2(X,Y)$.

La $(n-2)^{ième}$ polaire du point (0,0,1) a donc pour équation

$$Q(X,Y) = \Psi_2(X,Y) = 0$$

Elle est réductible. Ce raisonnement étant valable pour tout point simple de F moyennant un changement de coordonnées nous obtenons le résultat suivant

Théorème

La $(n-2)^{ième}$ polaire du point générique d'une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique p = 2 dont l'ordre est un entier impair se compose de deux droites (non nécessairement distinctes)

Cherchons maintenant le nombre de point de F pour lesquels cette $(n-2)^{ième}$ polaire contient la tangente comme partie

n étant impair il satisfait l'une ou l'autre des congruences

1°) $n \equiv 3 \mod 4$

2°) $n \equiv 1 \mod 4$

Dans le premier cas, l'équation de F s'écrit sous la forme

$$f(x,y,z) = x^3a_1 + y^3a_2 + z^3a_3 + x^2ya_3 + \ldots\ldots + xyza_4 + x^3y^3za_k + \ldots = 0$$

Dans le second cas, on a:

$$f(x,y,z) = xb_1 + yb_2 + zb_3 + x^3y^2b_4 + y^3z^2b_5 + \ldots + x^2y^2zb_7 + \ldots$$
$$+ x^3yzb_{10} + y^3zxb_{11} + z^3xya_{12} = 0$$

Où les a_i, b_j sont des polynômes homogènes en (x^4, y^4, z^4)

L'équation de la $(n-2)^{ième}$ polaire du point (x,y,z) calculée pour l'un ou l'autre type ci-dessus prend la forme

$$Q(X,Y,Z) = X^2A_1 + Y^2A_2 + Z^2A_3 + XYA_4 + YZA_5 + ZXA_6 = 0$$

Les A_i étant des polynômes homogènes de degré (n-2) n'appartenant pas en général à $K(x^2, y^2, z^2)$

La tangente au point (x,y,z) a pour équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

Le point (x,y,z) étant simple f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas tous nuls. Supposons par exemple $f'_z \neq 0$

(x,y,z) est inflexionnel si et seulement si la tangente est une composante de Q. Il nous faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0 & (1) \\ Q(X,Y,Z) = 0 & (2) \end{cases}$$

En tirant Z dans la 1ère équation et en remplaçant dans la 2ème Z par cette valeur nous obtenons

$$X^2(\lambda_1(f'_z)^2 + \lambda_3(f'_x)^2 + A_6f'_x f'_z) + Y^2(\lambda_2(f'_z)^2 + \lambda_3(f'_y)^2 + \lambda_5 f'_y f'_z)$$
$$+ XY(\lambda_6 f'_x f'_z + \lambda_6 f'_y f'_z) = 0$$

Ceci doit être vrai pour tout point (X,Y,Z) de la tangente d'inflexion. Donc (x,y,z) est inflexionnel entraîne que cette équation est identiquement nulle. Nous devons donc avoir

$$\begin{cases} A_1(f'_z)^2 + A_3(f'_x)^2 + A_6 f'_x f'_z = 0 \\ A_2(f'_z)^2 + A_3(f'_y)^2 + A_5 f'_y f'_z = 0 \\ A_5 f'_x f'_z + A_6 f'_y f'_z = 0 \end{cases}$$

Chacune de ces équations représente une courbe d'ordre (3n-4) qui coupe F en n (3n-4) points distincts au plus d'où ;

Théorème :

Une courbe irréductible définie sur un corps de caractéristique 2 d'ordre impair possède au plus n(3n-4)
(dans le cas où la $(n-2)^{ième}$ polaire n'est pas évanouissante)

Examinons le cas des courbes particulières suivantes

Supposons tout d'abord $n \equiv 3 \bmod 4$

Considérons la courbe F d'équation f = 0 avec $f'_z = \Psi(x^2,y^2,z^2)$ f s'écrit alors

$$f(x,y,z) = x^3a_1 + y^3a_2 + x^2ya_3 + xy^2a_4 + z(x^2a_5 + y^2a_6) = 0$$

Les a_i sont des polynômes homogènes de $K(x^4,y^4,z^4)$. L'équation de la $(n-2)^{ième}$ polaire du point (x,y,z) est alors

$$X^2(xa_1 + ya_3 + za_5) + Y^2(ya_2 + xa_4 + za_6) = 0$$

C'est une droite double qui passe par le point fixe (0,0,1) qui est d'ailleurs un point de la courbe. Le point (x,y,z) est d'inflexion si et seulement si sa tangente passe par le point (0,0,1). Les points d'inflexion de F sont donc les points simples de F qui se trouvent sur la courbe G d'équation

$$g(x,y,z) = x^2a_5 + y^2a_6 = 0$$

Si f'_z est identiquement nul F admet une infinité de points d'inflexion. Maintenant supposons que $\Psi(x^2,y^2,z^2) \neq 0$ c'est à dire que g(x,y,z) représente effectivement une courbe . Dans ce cas on a

$$g(x,y,z) = \left[g_1(x,y,z)\right]^2$$

$g_1 \in K(x,y,z)$ mais $\notin K(x^2,y^2,z^2)$

G coupe F en au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$ points distincts.

Théorème

Une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique 2 remplissant les conditions ci-dessus possède au plus $\frac{1}{2}$ n(n-2) point d'inflexion.

On peut déjà remarquer que pour une telle courbe la $(n-3)^{ième}$ polaire du point (x,y,z) dont l'équation est :

$$X^3a_1 + Y^3a_2 + X^2Ya_3 + XY^2a_4 + ZX^2a_5 + ZY^2a_6 = 0$$

ne peut pas s'évancuir

Nous supposons maintenant que $n \equiv 1 \bmod 4$

Considérons la courbe F d'équation f = 0 avec $f'_z = Y(x^2,y^2,z^4)$ f s'écrit alors

$$f(x,y,z) = xa_1 + ya_2 + za_3 + x^2y^2za_4 + x^2y^2a_5 + x^3y^2a_6 = 0$$

Les a_i sont des polynômes homogènes de K (x^4,y^4,z^4) . Formons l'équation de la $(n-2)^{ième}$ polaire du point (x,y,z)

$$Q(X,Y,Z) = X^2(y^2za_4 + y^3a_5 + xy^2a_6) + Y^2(x^2za_4 + x^2ya_5 + x^3a_6) = 0$$

C'est une droite double passant par le point fixe (0,0,1). Ce point n'est pas nécessairement sur la courbe F (il en est ainsi si et seulement si $a_3(0,0,1)=0$)

La $(n-3)^{ième}$ polaire a pour équation

$$X^2Z\,(y^2a_4) + Y^2Z(x^2a_4) + Y^3(x^2a_5) + X^2Y(y^2a_5) + X^3(y^2a_6) + XY^2(x^2a_6) = 0$$

Si les polynômes a_5,a_6 sont identiquement nuls, la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique de F contient la $(n-2)^{ième}$ polaire du même point. Réciproquement si la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique de F contient la $(n-2)^{ième}$ polaire les polynômes a_5 et a_6 sont identiquement nuls . Il nous faut donc distinguer ici deux types de courbes.

1°) La $(n-3)^{ième}$ polaire ne contient pas la $(n-2)^{ième}$ polaire

Q s'écrit alors

$$Q(X,Y,Z) = X^2(y^2za_4 + y^3a_5 + xy^2a_6) + Y^2(x^2za_4 + x^2ya_5 + x^3a_6) = 0$$

Les points d'inflexion de F sont alors ces points simples qui sont les points de contact des tangentes issues du point (0,0,1) Ces points sont sur la courbe d'équation

$$g(x,y,z) = a_3 + x^2y^2a_4 = \left[g_1(x,y,z)\right]^2$$

g est d'ordre (n-1)

D'où :

Théorème

Une courbe F remplissant les conditions ci-dessus possède au plus $\frac{1}{2}n\,(n-2)$ points d'inflexion

2°) la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique contient la $(n-2)^{ième}$ polaire:

Q s'écrit alors :

$$Q(X,Y,Z) = a_4\,[Xy + Yx]^2 = 0$$

Q est évanouissante pour les points de F qui se trouvent sur la courbe d'équation

$$a_4(x^4,y^4,z^4) = [a\,(x,y,z)]^4$$

Ces points (simples) sont inflexionnels. Le nombre de ces points est au plus $\frac{1}{4}n(n-5)$

Maintenant supposons que $a_4 \neq 0$

Le point (x,y,z) est alors un point d'inflexion si et seulement si la tangente en ce point passe par le point (0,0,1). Ce sont donc les points de F qui se trouvent sur la courbe d'équation

$$a_3 + x^2y^2\,a_4 = [a'_3 + xya'_4]^2 = 0$$

Leur nombre est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$

Le nombre total de points d'inflexion est donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}n\,(n-5) + \frac{1}{2}n(n-1)$ soit $\frac{1}{4}n\,[3n-7]$

Théorème

Une courbe F irréductible définie sur un corps de caractéristique 2, d'ordre $n(n \equiv 2 \bmod 4)$ dont la $(n-3)^{ième}$ polaire du point générique contient la $(n-2)^{ième}$ polaire qui est une droite double possède au plus

$\frac{1}{4}n\,(3n-7)$ points d'inflexion

Dans tout ce qui précède on suppose bien entendu que $f'_z \not\equiv 0$, sinon la courbe aurait une infinité de points d'inflexion (plus exactement $f(x^2,y^2,z^4) \equiv 0$)

En particulier si la courbe F possède une équation de la forme

$$f = xA + yB + zC = 0$$

où A,B,C appartiennent à $K(x^4,y^4,z^4)$

la $(n-2)^{ième}$ polaire est évanouissante et tout point simple de F est inflexionnel.

Chapitre IV

ETUDE DES COURBES SPECIALES

Rappelons qu'une courbe spéciale sur un corps de caractéristique p est une courbe dont l'équation s'écrit

$$f = xA + yB + zC = 0$$

où A,B,C sont des polynômes homogènes de $K(x^p, y^p, z^p)$ si $p \geqslant 3$; si $p = 2$, A,B,C sont des polynômes homogènes de $K(x^4, y^4, z^4)$

Nous supposerons que le corps K est parfait et nous considérerons des courbes spéciales non singulières.

Classe d'une courbe spéciale

La classe d'une courbe est le nombre maximum de tangentes distinctes qu'on peut mener d'un point du plan à une courbe. Soit F une courbe d'ordre n. Soit P(a,b,c) un point du plan. On appelle 1ère polaire du point (a,b,c) par rapport à la courbe F la courbe d'ordre (n-1) d'équation

$$af'_x + bf'_y + cf'_z = 0$$

Les points de contact des tangentes menées d'un point P à la courbe F sont les points de F qui appartiennent à la 1ère polaire de P. Ils sont distincts ou non. La classe d'une courbe F est donc inférieure ou égale à n(n-1). Nous allons voir que pour les courbes spéciales cette valeur n'est jamais atteinte.

Soit r le plus grand entier positif ($r \geqslant 1$ si $p \geqslant 3$) et $r \geqslant 2$ si $p = 2$) tel que f s'écrit sous la forme

$$f = xA + yB + zC = 0$$

Où A,B,C sont des polynômes homogènes de $K(x^{p^r}, y^{p^r}, z^{p^r})$. Soit (a,b,c) un point du plan; sa première polaire par rapport à F a pour équation

$$p(x,y,z) = aA + bB + cC = \left[uA_1 + vB_1 + wC_1\right]^{p^r} = 0$$

Où l'on a posé

$$A = A_1^{p^r} \qquad B = B_1^{p^r} \qquad C = C_1^{p^r}$$

$$u^{p^r} = a \qquad v^{p^r} = b \qquad w^{p^r} = c$$

et $p_1(x,y,z) = uA_1 + vB_1 + wC_1 = 0$

p se compose de p_1 comptée p^r fois.

Si (a,b,c) sont des éléments de K, p_1 est à coefficients dans K sinon ses coefficients sont des éléments du corps K(u,v,w) obtenu à partir de K par une adjonction finie d'éléments. f et p_1 sont dans tous les cas à coefficients dans K(u,v,w) et sont respectivement de degré n, $\frac{1}{p^r}(n-1)$. Le nombre de points distincts de F qui sont sur p est donc

$$\frac{1}{p^r} n(n-1)$$

Théorème

La classe d'une courbe F qui satisfait les conditions ci-dessus est égale à $\frac{1}{p^r} n(n-1)$

Remarque

On démontre que sur un corps de caractéristique 2 toute courbe non singulière est de classe $\frac{1}{2} n(n-1)$. Les courbes spéciales en caractéristique 2 sont celles dont la classe est inférieure ou égale à $\frac{1}{4} n(n-1)$

Considérons maintenant les courbes d'ordre $n = p^r + 1$

($r \geqslant 1$ si $p \geqslant 3$ et $r \geqslant 2$ si $p = 2$)

dont l'équation satisfait la condition suivante

$$f = xA + yB + zC = 0$$

où A,B,C sont linéaires en $(x^{p^r}, y^{p^r}, z^{p^r})$. D'après cette condition f possède au plus 9 termes.

Cherchons la classe d'une telle courbe. L'équation de la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire du point (a,b,c) est comme ci-dessus

$$p(x,y,z) = \left[p_1(x,y,z)\right]^{p^r}$$

Cette fois p_1 est une droite. Elle coupe F en n points distincts puisque F est supposée non singulière.

Théorème

La classe d'une courbe spéciale non singulière d'ordre $n = p^r + 1$ (r satisfaisant les entiers ci-dessus) ou les "coefficients" de F x,y,z sont des formes linéaires en x^{p^r} , y^{p^r} , z^{p^r} est égale à son ordre.

Nous allons étudier dans ce qui suit quelques courbes spéciales dont le modèle projectif est l'équation de Dyck - Fermat (p = 3)

Quartique en caractéristique 3

La quartique spéciale est caractérisée par la présence exclusive des termes en $x^4, y^4, z^4, y^3z, yz^3, zx^3, xz^3, xy^3, yx^3$. Il faut donc 9 conditions pour qu'une quartique soit spéciale.

La polaire d'un point quelconque est une droite triple: en effet f'_z donne les termes $0,0,z^3,y^3,0,0\ x^3,0,0$

$$ux^3 + vy^3 + wz^3 = (u_1x + v_1y + w_1z)^3$$

ou $u_1^3 = u \qquad v_1^3 = v \qquad w_1^3 = w$

Réciproquement toute quartique dont deux points ont pour polaire une droite triple est spéciale.

En effet, une droite triple est caractérisée par la présence exclusive de termes en x^3, y^3, z^3

f'_z droite triple si et seulement si les termes en y^2z^2, z^2x^2, xy^2z, xyz^2 ne figurent pas dans l'équation de la quartique

f'_y droite triple supprime le dernier terme genant x^2y^2.

Maintenant étudions la quartique dont le modèle projectif est l'équation de Dyck - Fermat

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

Cherchons l'intersection de F et de sa tangente au point (x,y,z)

Nous avons le système

$$\begin{cases} x^3X + y^3Y + z^3Z = 0 \\ X^4 + Y^4 + Z^4 = 0 \end{cases}$$

En éliminant Z on obtient

$$z^{12}(X^4+Y^4) + (x^3X + y^3Y)^4 = 0$$

On obtient en utilisant les identités

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + a^3b + ab^3 + b^4$$

$$- y^{12}X^4 - x^{12}Y^4 + x^3y^3X^3Y + x^3y^9XY^3 = 0$$

qui s'écrit

$$(X^3y^3 - x^3Y^3)(x^9Y - y^9X) = 0$$

c'est à dire

$$(Xy - xY)^3 (x^9Y - y^9X) = 0$$

On voit que le point (x,y,z) compte pour 3 et qu'il y a un autre point

$$\frac{X}{x^9} = \frac{Y}{y^9} = \frac{Z}{z^9}$$

On obtient les points sur-inflexionnels en résolvant

$$\frac{x}{x^9} = \frac{y}{y^9} = \frac{z}{z^9}$$

On obtient

$$\left|\begin{array}{ll} x=0 & y^8 = z^8 \\ y=0 & z^8 = x^8 \\ z=0 & x^8 = y^8 \end{array}\right.$$

et enfin

Compte tenu de la relation $x^4 + y^4 + z^4 = 0$

Il reste

$$\left|\begin{array}{ll} x=0 & y^4 + z^4 = 0 \\ y=0 & z^4 + x^4 = 0 \\ z=0 & x^4 + y^4 = 0 \end{array}\right.$$

$$x^4 = y^4 = z^4$$

On a 28 points correspondant à 28 tangentes spéciales qui proviennent des 28 bitangentes traditionnelles .

Etudions le cas ou le modèle projectif de la quartique est celui de Klein:

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

La tangente au point (x,y,z) est

$$Xz^3 + Yx^3 + Zy^3 = 0$$

la courbe est $X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$

Par élimination de Z on obtient

$$y^9X^3Y - y^6Y^3(Xz^3+Yx^3) - X(Xz^9+Y^3x^9) = 0$$

en remplaçant le coefficient $y^6 z^3$ du terme Y^3X par

$$\frac{x^9y^3 + z^9x^3}{y^3}$$

on obtient

$$(yX - Yx)^3 (y^9 Y - Xz^9) = 0$$

Le point (x,y,z) compte encore pour 3 et le point restant est encore donné par

$$\frac{X}{y^9} = \frac{Y}{z^9} = \frac{Z}{x^9}$$

Courbe d'ordre 10 dont le modele projectif est

$$x^{10} + y^{10} + z^{10} = 0$$

Nous cherchons les intersections de cette courbe avec sa tangente. La tangente à F au point (x,y,z) a pour équation

$$x^9X + y^9Y + z^9Z = 0$$

On cherche les solutions communes des équations

$$\left| \begin{array}{l} x^9X + y^9Y + z^9Z = 0 \\ X^{10} + Y^{10} + Z^{10} = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne l'équation par élimination de Z

$$(x^9X + y^9Y)^{10} + z^{90}(X^{10} + Y^{10}) = 0$$

Mais

$$(x^9X + y^9Y)^{10} = x^{90}X^{10} + x^{81}y^9X^9Y + x^9y^{81}XY^9 + y^{90}Y^{10}$$

L'équation qui donne les intersections s'écrit finalement

$$(yX - xY)^9 (y^{81}X - x^{81}Y) = 0$$

le point (x,y,z) absorbe 9 des points d'intersection de la tangente avec la courbe. La tangente ne coupe plus la courbe qu'en un seul point dont les coordonnées sont données par

$$\frac{X}{x^{81}} = \frac{Y}{y^{8\alpha}} = \frac{Z}{z^{81}}$$

Les tangentes spéciales de la courbe sont celles qui la rencontre en un seul point de tels points de la courbe sont appelés points sur-inflexionnels. Ce sont les points de la courbe dont les coordonnées satisfont

$$\frac{x}{x^{81}} = \frac{y}{y^{81}} = \frac{z}{z^{81}}$$

ou encore

$$\begin{array}{lll} x = 0 & y^{80} = z^{80} \\ y = 0 & z^{80} = x^{80} \\ z = 0 & y^{80} = x^{80} \end{array}$$

Ces points étant sur la courbe , on doit avoir

$$\begin{cases} x = 0 & y^{10} + z^{10} = 0 \\ y = 0 & z^{10} + x^{10} = 0 \\ z = 0 & x^{10} + y^{10} = 0 \end{cases}$$

et $x^{10} = y^{10} = z^{10}$

L'accolade donne 30 points et l'équation $x^{10} = y^{10} = z^{10}$ en donne 100

Il y a donc en tout 130 points sur inflexionnels . Cette courbe possède donc 130 tangentes spéciales.

Considérons maintenant la courbe d'équation

$$x^{3^r + 1} + y^{3^r + 1} + z^{3^r + 1} = 0 \quad (r \text{ entier} \geq 0)$$

La tangente au point (x,y,z) a pour équation

$$x^{3^r} X + y^{3^r} Y + z^{3^r} Z = 0$$

On montre comme ci-dessus que l'équation qui donne les intersections de la courbe avec sa tangente est

$$(Xy - Yx)^{3^r} \left(y^{(3^r)^2} X - x^{(3^r)^2} Y \right) = 0$$

le point de contact absorbe donc 3^r des points commun à F et à sa tangente.

Les points sur inflexionnels sont donnés cette fois par

$$\frac{x}{x^{(3^r)^2}} = \frac{y}{y^{(3^r)^2}} = \frac{z}{z^{(3^r)^2}}$$

Comme précédemment on voit que ces points sont au nombre de $n(n+3)$, où n est l'ordre de la courbe.